PROFESORA, ¿QUÉ ES MULTIPLICAR?[I]

Teacher, what is multiply?

Obando-Zapata, G

Universidad de Antioquia, Colombia; gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

A pesar de las diferencias culturales que se puedan presentar de un país a otro, la respuesta a la pregunta planteada en título es, con pequeños matices, casi la misma: la multiplicación es una forma abreviada de sumar, cuando los sumandos son todos iguales. Esta forma de responder la pregunta, si bien da la ilusión de dar continuidad conceptual desde la suma hasta la multiplicación, abre el camino a una serie de problemáticas en el aprendizaje de la multiplicación a lo largo de la educación básica y media. Así entonces, En este artículo argumentaremos en favor de una comprensión de la multiplicación que se distancia de la perspectiva clásica de la suma de sumandos iguales, y que la posiciona en relación con la coordinación de procesos de variación entre cantidades, y por ende, sobre la base conceptual de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad.

Palabras clave: *Razonamiento proporcional; estructuras multiplicativas; pensamiento numérico; educación básica.*

Abstract

Despite cultural differences that may arise from one country to another, the answer to the question posed in the title is, with little nuances, almost the same: the multiplication is a shortened form of adding, when the summands are all equal. This way of answering that question, but gives the illusion of conceptual continuity from the sum to the multiplication, opens the way to an important series of problems in learning multiplication along the primary and secondary education. So then, this article will argue in favor of an understanding of multiplication that is away from the classical perspective of the sum of equal addends, and that positioned it in relation with the processes coordination of variation between quantities, and therefore on the conceptual basis of the notions of ratio, proportion and proportionality.

Keywords:

Proportional Reasoning; Multiplicative Structure;Numerical Thinking; Primary Education.

CÓMO SE ENSEÑA LA MULTIPLICACIÓN:

Una estrategia muy común para introducir el estudio de la multiplicación en los primeros años de la Educación Básica (por lo general finalizando el grado 2, o iniciando el grado 3) es la de mostrar la multiplicación como una forma de abreviar la suma, cuando los sumandos son todos iguales.Este tipo de mirada sobre la multiplicación tiene una ventaja aparente al mostrar una línea de continuidad desde la suma hacia la multiplicación, pero en el sentido estricto de la palabra, los eventos o fenómenos en donde se suma varias veces una misma cantidad al presentar explícitamente solo un sistema de cantidades (cantidad de lápices o de borradores) deja escondido elementos clave que permiten relacionar este tipo de situaciones con los casos más simples de proporcionalidad directa(Vergnaud, 1988, 1994, 2009), y por lo tanto, no permiten una buena comprensión de las relaciones entre las cantidades involucradas en toda situación multiplicativa(Gilberto Obando, Vasco, & Arboleda, 2014). Todo lo anterior, sin entrar a considerar los casos en los que la multiplicación no admite la interpretación de una suma de sumandos iguales, como por ejemplo, el cálculo de áreas de figuras planas a partir de multiplicar dos medidas lineales,[i] o cuando las cantidades multiplicadas son fracciones menores que la unidad.

Esta aproximación que se hace en la escuela a la multiplicación a partir de la suma de sumandos iguales no es la más apropiada,[ii] no solo porque es limitada para interpretar los tipos de tarea a los que se deben enfrentar los estudiantes, sino porque se circunscribe a una forma de pensamiento aditivo (acumulaciones sucesivas en una sola cantidad), alejándola de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas (variación conjunta de dos o más cantidades), pues los eventos o fenómenos que generan problemas multiplicativos son aquellos en donde existen al menos dos cantidades variables, para las cuales, la variación en una de ellas condiciona el proceso de variación en la otra(Obando Z., 2015). Incluso, en este tipo de situaciones, al ver la multiplicación como una suma abreviada se centra la atención en una sola de las cantidades, y por ende en su variación (acumulación aditiva), y se deja implícita la otra cantidad al igual que la variación conjunta de la primera con respecto a la segunda.

EL TRABAJO RELIZADO EN EL AULA

Con críticas como las anteriores y teniendo en cuenta que el conocimiento de la multiplicación forma parte de un constructo mucho más amplio, el de las estructuras multiplicativas(Vergnaud, 1988, 1994, 2009), durante una año lectivo escolar se analizó la actividad matemática de un grupo de estudiantes del grado tercero de una Institución Educativa, [iii]la cual pretende una organización de los procesos de enseñanza de la multiplicación desde la perspectiva del isomorfismo de medidas, como una alternativa para superar las problemáticas antes enunciadas.

Así entonces, en la propuesta pedagógica para el grado 3, en el plan de área de esta institución destaca un eje llamado "estructuras multiplicativas", que se desarrolla a lo largo del año escolar, y a partir de líneas temáticas como las siguientes:

- Diferentes algoritmos para la multiplicación: egipcio, ruso, celosía (árabe), tradicional;
- Relaciones multiplicativas: doble de…, la mitad de… (*ídem*, cuádruple de…, cuarta parte de…; óctuple de…, octava parte de…; etc.); triple de…, la tercera parte de… (*ídem*, séxtuple de…, la sexta parte de…; 9 veces…, la novena parte de…; etc.), entre otras;

---

[i] En ocasiones este cálculo áreas de figuras planas se hace cuadriculando la superficie de la figura, contando cuántos de esos cuadrados unidad hay en un lado, y sumando luego esta cantidad tantas veces como cuadrados unidad hay en el otro lado. Si bien procedimientos de este tipo son expresiones de una suma de sumandos iguales, se debe destacar que en el sentido estricto de la palabra, no se multiplicaron las dos medidas lineales, sino que se cambia el problema original por otro, que consiste en multiplicar una cantidad de área (la cantidad de cuadrados unidad en uno de los lado) por un número sin unidades, que es el que representa las veces que se repite dicha cantidad de área. Así entonces, cuando el área es vista como producto de dos medidas lineales, esta multiplicación no admite interpretación como suma de sumandos iguales.

[ii] Es importante aclarar en este punto que la aproximación a la multiplicación como suma de sumandos iguales tiene un trasfondo en la axiomática de Peano, en donde la multiplicación es definida en forma recursiva como: (1) y (2) (donde x, y son números naturales y). Esta definición, en última instancia, reduce la multiplicación a una suma donde x se repite y veces como sumando. Sin embargo, esta interpretación de la multiplicación como abreviación de una suma de sumandos iguales, derivada de un aproximación formalizada con base en la axiomática de Peano, no da cuenta de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas presentes en los tipos de problemas que se resuelven a través de multiplicaciones y divisiones, en particular, de aquellos que implican situaciones de proporcionalidad directa.

[iii] En Colombia, el grado tercero de la Educación Básica lo cursan estudiantes que, en promedio, tienen 10 años de edad. Esta Institución Educativa, es de carácter privado, y atiende estudiantes de una población de condiciones socioeconómicas altos. El trabajo se realizó a lo largo de un año escolar, entre los meses de septiembre de 2010 y junio de 2011.

- Problemas multiplicativos: cuarta proporcional y proporcionalidad directa;
- Tablas de multiplicar.

Estas líneas temáticas, que se desarrollan paralelamente a lo largo del año lectivo, presentan de hecho cuestiones interesantes en lo que tiene que ver con los primeros aprendizajes de la multiplicación. En primer lugar, la aproximación a las relaciones multiplicativas pone en simultáneo parejas de razones (relaciones parte-todo) de la forma *n-veces de…* y *n-ésima parte de…*, y esto permite trabajar al tiempo tanto con las relaciones directas como con las inversas, relacionando la razón *n-veces* (razones en las que la cantidad mayor es un número exacto de veces la cantidad menor) con la razón *n-ésima parte de* (cuando la cantidad menor es una parte alícuota de la mayor). Dicho de otra manera, la multiplicación se aprende en simultáneo con la división. Además, estas parejas de razones son organizadas a través de familias de cantidades que conservan la regularidad de que al ser ordenadas de mayor a menor, cada pareja de cantidades consecutivas es una de otra el *doble de…*, o la *mitad de…*; el *triple de…*, o el *tercio de…*; etc. Esta regularidad en las cantidades genera entonces familias de parejas de razones de la forma 2^n *veces…* $\frac{1}{2^n}$ *parte de…*; o de la forma 3^n *veces…* $\frac{1}{3n}$ *parte de…etc.* Las regularidades que se identifican entre estas familias de cantidades y de parejas de razones son utilizadas como una estrategia para el aprendizaje de las tablas de multiplicar, de tal forma que éste sea resultado de la aplicación sucesiva de relaciones entre números (razones).

Además, el estudio de estas familias de razones es la base para el trabajo con las multiplicaciones; así por ejemplo, multiplicar por 2 tiene como base la razón *doble de…*, multiplicar por 3, la razón *triple de…*, y así sucesivamente. De esta manera la institución busca una base conceptual para la multiplicación a partir de la noción de razón y, como se verá más adelante, esta apuesta institucional da una forma específica a la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

Finalmente se plantean los problemas multiplicativos como si fueran problemas de proporcionalidad simple directa. Este trabajo se introdujo a través de una adaptación de la propuesta de los minicomputadores de Papy[iv] que realizaron los profesores de la institución: a los niños se les presenta una tabla con cuatro casillas, donde se dan tres valores (el valor de la primera posición es uno), y se debe encontrar un cuarto valor desconocido. Dos a dos las cantidades son de la misma naturaleza y se organizan en la tabla de tal forma cada pareja ocupa una columna diferente. Esquemáticamente esto les permite trabajar situaciones de la forma $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & a \\ n & \rightarrow & ? \end{matrix}$ para la multiplicación, o de la forma $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & ? \\ n & \rightarrow & n \times a \end{matrix}$ o $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & a \\ ? & \rightarrow & n \times a \end{matrix}$ para el caso de la división. El trabajo se desarrolla de manera tal que en ocasiones se da la representación gráfica, para que el estudiante elabore el enunciado verbal del problema y realice el cálculo respectivo, o dado el enunciado verbal, el estudiante debe realizar la representación gráfica y solucionar el problema.

Puede decirse que esta forma de organizar el estudio de las relaciones multiplicativas tiene un fundamento epistemológico interesante, pues, de un lado, pone la idea de razón como base para la

---

[iv] Una especie de ábaco plano, con cuatro casillas, diseñado por Georges Papy en los años 50, usado para el aprendizaje de la numeración y el cálculo numérico (fundamentalmente en el sistema binario). La adaptación realizada en la institución se orientó hacia la representación de las cuatro cantidades implicadas en una situación multiplicativa de isomorfismo de medidas, sin tomar en consideración los cambios de unidad que implicaban los valores posicionales de cada casilla en la propuesta original de Papy. En el sentido estricto de la palabra, al no considerar el valor posicional de las casillas se deja de lado la propuesta original, y por tanto, bien podría dársele otro nombre a esta adaptación, pero aquí se conserva ese nombre en tanto era el que se le daba en la institución.

construcción de tales tipos de relaciones y, de otro, organiza los procesos de estudio de la multiplicación y la división como parte del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. De esta manera el estudio de ciertos objetos de conocimiento tales como la razón, el número racional, la proporción y la proporcionalidad se realiza siguiendo una línea que toma como base la linealidad. Además, las operaciones multiplicación y división son estudiadas en contextos que las muestran una como inversa de la otra, y separando los aspectos relativos al cálculo de los que son propios de las relaciones multiplicativas de base. Y todo lo anterior, unido a la puesta en escenade diferentes formas de representación (verbal, gráfica, simbólica –fracción y notación decimal) y a partir de favorecer el desarrollo de diferentes tipos de técnicas de cálculo (diferentes algoritmos, uso de relaciones numéricas, memorización de hechos numéricos), lo que genera entonces ambientes ricos para la actividad matemática de los alumnos en donde se favorecen la búsqueda de regularidades, la formulación y validación de hipótesis, la comparación de procedimientos, etc.

RESULTADOS DEL TRABAJO CON LOS ESTUDIANTES

Percepción de la covariación entre cantidades

Las imágenes mostradas en la figura 2, son respuestas dadas por los estudiantes a una de las tareas iniciales que se les propuso, en la cual se les daba el enunciado “Andrés pagó $120 por 8 dulces iguales. ¿Cuánto pagará por tres dulces?”, y se les entregaba una tabla en la que debían consignar el precio para otras cantidades de dulces, y en la cual solo se escribía la pareja de valores 8 y 120.

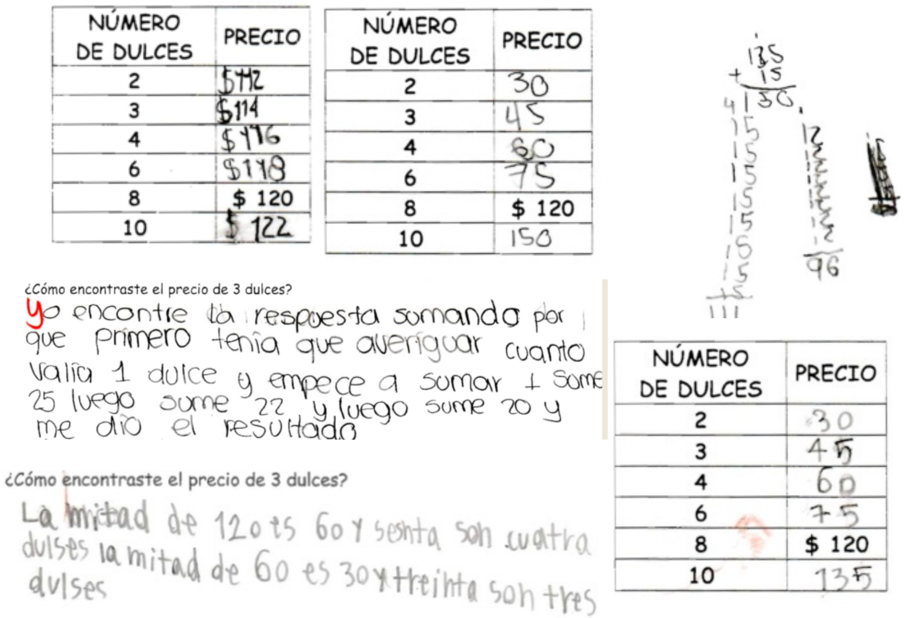

Figura1: procedimientos en una tarea de covarición entre dos cantidades

Los procedimientos de los estudiantesmuestran que pueden percibir la covariación entre las cantidades involucradas en el evento (cantidad de dulces, precio de dicha cantidad), pero no todas las formas de correlación establecida permiten realizar un tratamiento apropiado de la tarea.

Así por ejemplo, el procedimiento en la imagen de la parte superior izquierda, las dos cantidadesse correlacionan en función del número de casillas que se deben completar con los precios de los dulces. Por su parte, las otras dos imágenes de la parte superior (centro y derecha), tiene la diferencia de que el conteo se basa en suponer un valor hipotético para un dulce, y se realiza un conteo iterado de este valor hipotético tantas veces como cantidad de casillas vacías hay por llenar, y además, se busca que la distribución de valores haga coincidir a la cantidad de 8 dulces el valor de $ 120 (este valor hipotético se estableció de diversas formas, pero para el caso de estas dos imágenes, la estrategia fue buscar una cantidad que repetida 8 veces diera 120, y luego se repitió este 15, una vez por cada casilla en la tabla).

Nótese entonces que el instrumento usado para presentar la información determina la manera como se analizan las relaciones entre las cantidades. Esta forma de “ver” las relaciones entre las cantidades define unos procedimientos que no permiten asignar el valor correcto a cada cantidad de dulces, pues se basan en un criterio de distribución espacial de la escritura de las cantidades en la hoja de trabajo: la cantidad de casillas vacías en la segunda columna de la tabla se usan para hacer una distribución regular de una serie de valores de tal forma que el 120 fuera coherente con esta secuencia de valores, y se asume que cada casilla es un dulce más en la cuenta. Es importante llamar la atención en el procedimiento descrito en la frase que se puede leer en la parte inferior izquierda, pues como se puede ver, el estudiante ha identificado de manera clara la relación entre la cantidad de dulces y el valor correspondiente a dicha cantidad, y opera con esta relación de tal forma que reducir una de ellas a la mitad, reduce la otra igualmente a la mitad (claro, que al final de cadena de enunciados comete un error que lo lleva a un procedimiento equivocado al llenar la tabla), lo que muestra el poder de la noción de razón en el tratamiento de este tipo de situaciones.

Coordinación de un doble conteo

Como se puede observar de esta corta selección, los procedimientos de los estudiantes muestran cierta sensibilidad para percibir en un determinado evento el proceso de covariación entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades involucrados en el evento, pero el criterio o regularidad usado para definir tal proceso de covariación no les permite la descripción precisa de lo que realmente sucede en el evento. También se evidencia que los valores faltantes en la columna precio no se fijan de cualquier manera, sino que se hace a partir de un principio que tiene al menos dos momentos: uno, que fija el valor de un dulce (tomar como referencia que el valor de 8 dulces es $ 120), y otro, que permite hacer copias sucesivas de ese valor, tantas veces como dulces se tenga (lo que implica interpretar el valor escrito en cada una de las casillas de la columna de la izquierda). Nótese que en los casos mostrados el criterio escogido para una u ambas partes del proceso no es apropiado, pues los estudiantes más que centrar la atención en el proceso de variación de las cantidades en ambos sistemas, analizan la variación en cada sistema como dependiendo de su distribución espacial en la tabla, y trasladan relaciones en uno de los procesos como regla para controlar el proceso de variación en el otro sistema.

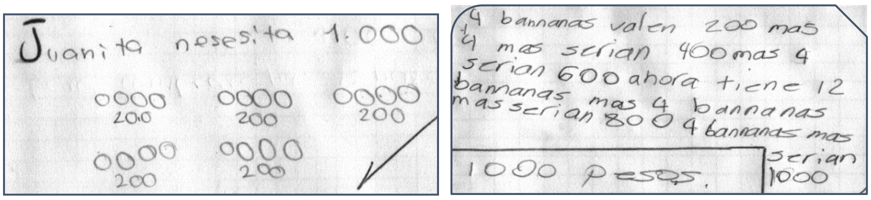

Figura 2: procedimientos de los estudiantes en otra tarea de covariación entre cantidades

En la figura 3 se muestran los procedimientos en otra tarea, similar a la anterior, pero en donde no se les pidió llenar una tabla. El enunciado sobre el cual trabajaron decía “Juanita ha comprado 4 bananas para regalar a algunos de sus amigos, y pagó 200 pesos. Ella quiere saber cuánto dinero necesitaría para regalar de una banana a cada uno de sus 20 compañeros de clase. ¿Cómo le ayudarías a Juanita a realizar las cuentas?”.[v] Estos dos procedimientos muestran plena conciencia del proceso de covariación entre los dos sistemas de cantidades, pues se explicita que por cada vez que se repita la cantidad 4 dulces, se repite la cantidad $ 200. Esto implica conciencia de la relación (razón):*cada cuatro dulces se corresponden con doscientos pesos*. Tener conciencia de este tipo de relaciones, es clave para la comprensión de una idea de razón, y para el uso instrumental de esta idea de razón en la comprensión de los conceptos propios de la multiplicación, como se puede ver, en las formas de representación tanto de las cantidades, como de sus procesos de variación, los cual es por demás fundamental en la objetivación de los aprendizajes sobre la multiplicación.

---

[v]En Colombia, una banana es un dulce o caramelo que viene envuelto en una cubierta plástica.

El siguiente diálogo igualmente es evidencia de la necesidad de tal comprensión:

36:06 e: es que no se si multiplicar, sumar o restar.

36:07 p: a ver empecemos. qué es lo que tienen que hace::r Juanita

36:11 e: Juanita apenas compró cuatro bananitas para regalarle a algunos amigos y cuando ahí::

36:21 p: doscientos pesos

36:25 e: ella quiere saber cuánto dinero necesitará para regalar una banana a cada uno de sus amigos

36:35 p: entonces cuántas bananas realmente necesitará Camila

36:38 e: a:h necesita:: veinte

36:39 p: necesita veinte bananas. y ella necesita saber cuánto dinero necesitaría para comprar las veinte bananas. y entonces. ella que.que tiene. ella. estos doscientos pesos por cuántas bananas fueron?

36:57 e: estos fue, po:r cuatro bananas

36:58 p: cuatro bananas, entonces para completar veinte bananas que tiene que hacer

37:04 e: se, se::: suma?

37:14 p: tiene que comprar más bananas?

37:15 e: si

37:16 p: cuantas más

((una larga espera mientras la estudiante piensa))

37:47 e: dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte

38:02 e: necesita: -- dieciséis?

38:03 p: aja. necesita dieciséis bananas más y cuanto le costarán esa dieciséis bananas más, si tú sabes que cuatro valen doscientos

38:16 e: si cuatro valen doscientos, más uno, trescientos.

38:34 p: NO. cuatro bananas valen doscientos

((otra pausa larga))

39:16 e: con cuatro bananas más ya serían cuatrocientos

39:18 p: exactamente, con cuatro bananas más serían cuatrocientos, perfecto. --- cuántas bananas llevarías aquí en total? --- cuántas bananas llevas hasta ahora?

39:46 e: ahora llevo:: - ocho

39:47 p: llevas ocho bananas y llevas cuatrocientos pesos

39:58 e: a:h (mas cinco)

39:59 p: y por qué cinco

40:02 e: más otras cuatro

40:04 p: más otras cuatro, porque tú sabes cuánto valen doscientos pero no sabes todavía cuánto valen cinco. más otras cuatro

40:14 e: cuatrocientos y dos ((no es audible))

40:16 p: serían seiscientos, más otras cuatro ya serían seiscientos

40:22 e: y ahora tiene doce bananas

40:23 p: y ahora tiene doce bananas

40:48 p: ...más

Desde la entrada 36:06 hasta la entrada 36:38, la interacción entre el profesor y el estudiante está orientada a que este tome conciencia de las de las cantidades involucradas en la situación. La intervención del profesor en la entrada 38:03 y 38:34 se presenta una situación crucial, pues se busca que el estudiante tome conciencia de la relación *cuatro bananas 200 pesos*, lo cual es crítico a partir de la entrada 39:16, en donde luego de la negación del profesor en la entrada anterior, el estudiante ve que por cada cuatro bananas, debe agregar $200 al total de dinero. Obsérvese como en la entrada 39:18 el profesor recapitula el trabajo realizado, mostrando las dos cuentas que se deben llevar, en las entradas siguientes, sigue insistiendo en los totales de ambas cantidades: cuántas bananas se completan, y cuánto dinero se ha acumulado.

En suma, lo anterior muestra varios elementos claves en la comprensión de la multiplicación: (1) diferenciar la naturaleza de cada uno de los sistemas de cantidades, (2) identificar que de acuerdo con las condiciones del evento que da origen a la tarea, al interior de cada sistema de cantidades hay un movimiento en los valores que pueden tomar las cantidades y, finalmente, (3) que ese movimiento de los valores de las cantidades está gobernado por una condición, para este caso, la razón *4 bananas son 200 pesos*, a este nivel, objetivada a partir de una expresión verbal. En ambos casos, la tarea se resuelve favorablemente por la comprensión de esta razón, y por la coordinación del doble conteo que se desencadena a partir de dicha razón, lo que garantiza dos cosas: una, cada que haya un cambio en una cantidad hay un cambio en la otra, y dos, el cambio se coordina a partir de una regularidad (cada que se agreguen cuatro bananas a la cantidad de bananas, se deben agregar $200 a la cantidad total de dinero).

Iconicidad y objetivación de las unidades de conteo

En una de las tareas los estudiantes debían completar los valores faltantes en unas tablas en las que se presentaba información incompleta sobre estados posibles de un juego realizado.[vi] Para cada tabla se sabía el color de la sección de la canasta a la cual pertenecían los valores consignados en ella (y por ende el puntaje que daba cada ficha en dicha sección) y se daba, o bien la cantidad de fichas obtenidas en dicha sección de la canasta, y se debía encontrar el puntaje correspondiente a dicha cantidad de fichas, o bien se daba el puntaje total en un determinado color, y se debía determinar la cantidad de fichas que originaron dicho valor.

A pesar de lo elemental que parecen ser los procedimientos mostrados en la figura 4, implican una complejidad que se pone en evidencia en la manera como se realiza la representación de las cantidades y sus relaciones. Por ejemplo, en la imagen de la parte superior derecha, cada grupo de rallas representa una ficha, y la cantidad de rallas en el grupo, el valor de la ficha de acuerdo a la zona en que cayó en la canasta (cada grupo de rallas representa la razón *una ficha, cantidad de puntos por dicha ficha*). Es importante resaltar entonces que en estas formas de representación se están objetivando la relación *una ficha,puntos por esta ficha* (al representar el valor de la ficha

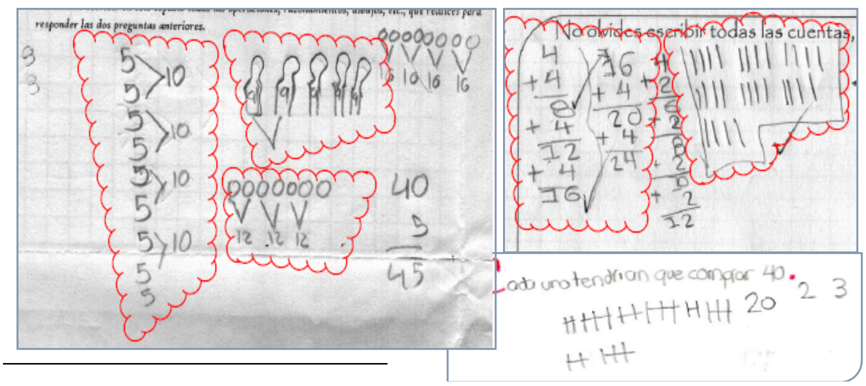

Figura 3: representaciones de la razón entre dos cantidades y operaciones realizadas con dichas representaciones

[vi] ...) que tenía cuatro zonas pintadas de un c... n que cayera.

con un grupo de rayas verticales), y por ende, la repetición de *n* de tales grupos objetivan la cantidad de fichas y la cantidad de puntos se objetiva en el conteo del total de las rayas dibujadas.En la imagen de la izquierda, los dos "círculos" unidos con una raya al "12", representa la razón, por *cada 2 fichas, 12 puntos*. Obsérvese entonces las diferentes formas de iconicidad utilizada para representar la razón entre las dos cantidades, y además, la forma de utilizar operativamente esta dicha representación de la razón. En particular, es de notar cómo en los procedimientos mostrados, si bien se representan los valores de las fichas con rayas horizontales, y hay tantos grupos como fichas en un determinado color, hay un apoyo en la representación numérica para determinar el total de puntos obtenidos sumando tantas veces el valor de la ficha, como fichas en un determinado color.

Este recurso a la combinación entre representaciones icónicas, acompañadas de representaciones simbólicas (uso de números), permite llevar el control de los dos procesos de variación acumulativa. Estas formas de representación combinada permiten a los estudiantes una objetivación de las cantidades en cada sistema, de la relación entre dichas cantidades, y de los procedimientos para llevar a cabo el control y coordinación de los dos procesos de conteo que permiten resolver el problema. Esto les entrega capacidades operatorias para controlar los dos procesos de acumulación, y por ende, de la correlación entre la cantidad de bolos con la cantidad de puntos que les corresponde.

CONCLUSIONES

En los casos analizados, el control de uno de los sumandos está soportado sobre algún medio (físicamente en las fichas usadas en el juego, en los dibujos, en las grafías escritas en las hojas de trabajo, etc.), y puede ser de uno en varios (cuando la relación inicial es del tipo: por cada unidad en uno de los sistema hay ***n*** unidades en el otro sistema) o de varios a varios (cuando la relación es del tipo: por cada ***m*** unidades en uno de los sistema, hay ***n*** unidades en el otro). Este proceso de control de la cantidad de veces que se repite la cantidad unidad en uno de los sistemas (los puntos por cada ficha, el valor de una banana, los puntos por bolo, etc.) se oculta tras las representaciones físicas de las cantidades y de las acciones físicas de los estudiantes con dichas representaciones y, entonces, se da la impresión que sólo se estuviera trabajando sobre una sola suma iterada (la de los puntos, los precios, etc.), pero en realidad hay dos procesos de sumas iteradas que se coordinan entre sí: la suma de uno en uno (doces, cuatros, cincos) en un sistema de cantidades (la cantidad de fichas, la cantidad de bananas) se coordina con la suma de dos en dos, de cinco en cinco, etc., en el otro sistema de cantidades (el total de puntos, el precio total, etc.). Este ocultamiento de uno de los dos procesos de conteo sucede en la mayoría de las situaciones multiplicativas a las que clásicamente se enfrenta el estudiante en el aula de clase, y por ende, pareciese que la multiplicación fuese solamente una suma iterada, la que van de n en n, pues cuántas veces esté n en la suma como sumando, es la cantidad de veces que se ha sumado el uno en el otro sistema de cantidades.

Así entonces, lo que estos procedimientos nos muestran es cómo las diferentes formas de representación utilizadas por los estudiantes les permiten objetivar varios elementos claves en la construcción de las relaciones multiplicativas implicadas en las diferentes situaciones:

1. En primer lugar, diferenciar los dos sistemas de cantidad cuyo proceso de variación está correlacionado a partir de una cierta relación (la razón de puntos obtenidos a las fichas o bolos derribados), y en segundo lugar, objetivar la relación (razón) que pone en correspondencia las cantidades en uno de los sistemas con las cantidades del otro sistema.
2. A partir de lo anterior, coordinar los dos procesos de conteo, lo que a su vez implica:
   a. Identificar la unidad de conteo que se repite en cada uno de los dos sistemas de cantidades.

b. Dada una cantidad A en uno de los sistemas de cantidades, repetir la unidad de conteo en el otro sistema de cantidades tantas veces como esta cantidad A contenga la unidad de conteo de su sistema de cantidades.

3. Y finalmente, obtener el resultado a partir, bien de conteos sucesivos, o a partir de la suma de una misma cantidad un cierto número de veces, o a través de una multiplicación.

Estos tres elementos muestran que la multiplicación como la abreviación de una suma iterada de un mismo sumando es una interpretación que simplifica al extremo la complejidad subyacente a la comprensión de la multiplicación, pues de un lado, en una situación multiplicativa intervienen dos sistemas de cantidades (y no uno como daría a entender la suma iterada de un solo sumando) que se correlacionan a partir de una razón constante, y de otro, es necesario poner en correspondencia dos procesos de conteo iterado. Es decir, en la multiplicación no hay uno, sino dos procesos de conteo iterado que se correlacionan uno al otro.

Así entonces, una noción de multiplicación que cumpla con las condiciones anteriores puede ser la siguiente: *multiplicar es encontrar un número que es a uno de los factores, como el otro factor es a la unidad*(Gilberto Obando, Vasco, & Arboleda, 2013; Obando Z., 2015). Esta idea de multiplicación, tomada del libro VII de los elementos de Euclides, se basa en la igualdad de dos razones, pero a su vez, deja ver los dos procesos de variación que relacionan las cantidades involucradas en la situación, covariación controlada por la razón de uno de los factores a la unidad (valor o precio por unidad). Esta idea de multiplicación nos muestra que la interpretación tradicional de la multiplicación como abreviación de una sola suma de sumandos iguales no deja ver el trasfondo conceptual que da soporte a la multiplicación como objeto de conocimiento, a saber, la razón entre dos cantidades y la coordinación de los dos procesos de conteos correlacionados por dicha razón. Pero coordinar dichos procesos de conteo implica que para cada uno de los sistemas de cantidades se identifique una cantidad que se repite –unidad para contar–, y que se coordine la repetición de ambas unidades. Además, esta noción de multiplicación muestra de manera inmediata la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad directa, pues evidencia que en el problema más simple de multiplicación están presentes las relaciones lineales de base características de toda proporcionalidad directa entre dos cantidades o magnitudes.

Sin embargo, esta forma de aproximación a la multiplicación en la escuela deja un vacío en tanto no permite abarcar los tipos de situaciones en las que una de las cantidades es el producto (producto de medidas) de las otras, como por ejemplo, un área como resultado del producto de las dos dimensiones lineales que la componen, o volumen como resultado del producto de un área por una longitud lineal. Este es un campo abierto a la investigación en educación matemática, y de grandes posibilidades de aporte a la comprensión de los procesos de estudio de la multiplicación en la educación básica.

Referencias

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81. doi:10.12802/relime.13.1713

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. In R. Flórez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Obando Z., G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (1 ed., pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83-94. doi:10.1159/000202727

I Este trabajo es derivado de la Tesis doctoral del autor, Universidad del Valle, Colombia, y que lleva por título "Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica".